PROBLEM ALOKACJI Z LOSOWYM PRAWEM AKCEPTACJI OFERT

Anna Krasnosielska-Kobos[1]
Politechnika Warszawska

Streszczenie: *W niniejszym artykule przedstawimy pewną modyfikację problemu alokacji. Problem ten można sformułować następująco: sprzedawcy w agencji handlowej mają prawo do sprzedaży oferowanych towarów po cenie oferowanej przez kupującego. W tym celu obserwują oferty pojawiające się sekwencyjnie w momentach skoków procesu Poissona, które są jednocześnie momentami decyzji. Wypłata, jaką otrzyma sprzedawca, wybierając daną ofertę, jest równa zdyskontowanej wartości tej oferty. W momencie pojawienia się oferty tylko jeden z nich otrzymuje prawo zaakceptowania bądź odrzucenia prezentowanej właśnie oferty. Odrzucone oferty nie mogą być ani ponownie rozpatrywane, ani rozpatrywane przez pozostałych sprzedawców. Prawo decydowania odnośnie akceptacji bądź odrzucenia danej oferty przydzielane jest w sposób losowy, a prawdopodobieństwo otrzymania tego prawa przez każdego ze sprzedawców jest równe. Celem jest znalezienie strategii pozwalającej maksymalizować łączny oczekiwany zysk sprzedawców przy założeniu, że każdy z niech średnio powinien zarobić taką samą kwotę.*

Słowa kluczowe: *wielokrotne stopowanie, problem alokacji, losowe priorytety, proces Poissona.*

ALLOCATION PROBLEM WITH RANDOM RIGHT TO ACCEPT OFFERS

Abstract: *In the paper, we analyze a modification of the allocation problem. The problem can be formulated as follows: sellers in trading agency have a right to sell goods at price offered by the buyer. To this aim, they observe offers which appear at jump times of a Poisson process which are at the same time the decision moments. A reward of the seller who accepted the offer is equal to the discounted value of the selected offer. The right to accept or reject the presented offer is given only to one of the sellers at the moment of appearance of the offer.*

[1] Anna Krasnosielska-Kobos, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, pl. Politechniki 1, 00-661 Warszawa, e-mail: akrasno@mini.pw.edu.pl

Once rejected, offer cannot be considered again nor can it be considered by other sellers. The right to make the decision concerning the acceptance or rejection of a presented offer is assigned in random way, such that the probability of obtaining this right by each of the sellers is equal. The aim is to find the strategy which allows to maximize the sum of expected rewards of the sellers under the condition that each of them should earn the same amount of money on average.

Keywords: *multiple stopping, allocation problem, random priority, Poisson process.*

1. Wprowadzenie

Problem alokacji rozważany w niniejszym artykule można przedstawić następująco. Pewne przedsiębiorstwo zatrudnia m pracowników odpowiedzialnych za sprzedaż danego produktu. Przedsiębiorstwo to chce sprzedać w określonym czasie k produktów tego samego typu po cenie pozwalającej maksymalizować oczekiwany łączny zysk (równoważnie: oczekiwaną łączną wypłatę) ze sprzedaży. Przy czym każdy z pracowników otrzyma premię (pewien ustalony procent od wypracowanego przez niego zysku firmy) za sprzedany produkt. W losowych momentach pojawiają się klienci (kupujący). Każdy z nich wybiera losowo pracownika, u którego potencjalnie kupi dane dobro, składając mu za nie pewną ofertę. Oferta ta nie podlega negocjacjom. Wybór każdego pracownika jest jednakowo prawdopodobny. Jeśli wybrany pracownik nie przyjmie proponowanej przez klienta oferty, to klient ten pójdzie do konkurencyjnego przedsiębiorstwa. Z upływem czasu wartość sprzedawanych dóbr maleje (np. ze względu na zmianę wartości pieniądza w czasie, ponoszonych kosztów utrzymania tych dóbr). Zatem, im dłużej sprzedaż jest odkładana, tym zysk ze sprzedaży jest mniejszy. Celem jest wyznaczenie strategii pozwalającej maksymalizować oczekiwany łączny zysk przedsiębiorstwa przy założeniu, że w tej strategii każdy z pracowników powinien uzyskać średnio taką samą premię (czyli równoważnie wypracować średnio taki sam zysk dla przedsiębiorstwa).

Powyższy problem alokacji można również sformułować jako m-osobową grę koalicyjną z losowymi priorytetami, w której losowanie priorytetu odbywa się przed podjęciem decyzji przez graczy odnoście odrzucenia bądź akceptacji danej oferty. W grze tej gracze mają równe prawdopodobieństwo otrzymania priorytetu, a ich celem jest maksymalizacja oczekiwanej łącznej wypłaty przy założeniu, że każdy z graczy może otrzymać więcej niż jedną wypłatę.

Rozważany problem alokacji jest inspirowany zagadnieniem sformułowanym i rozwiązanym w pracy Elfvinga (1967), a następnie omówionym w pracy Siegmunda (1967), który osłabił część założeń. Problem Elfvinga-Siegmunda (występujący w literaturze również pod nazwą: problem Elfvinga) jest to problem optymalnego stopowania ciągu $\{Y_n\}_{n \in N}$ niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie obserwowanych w momentach skoków procesu Poissona $\{T_n\}_{n \in N}$ (to znaczy rozkład czasu między zgłoszeniami jest wykładniczy i odstępy czasu między zgłoszeniami są niezależne, patrz Billingsley, 2009, s. 297-304). W problemie tym wypłaty są postaci $Y_n r(T_n)$, gdzie r jest funkcją „dyskontującą". Problem ten był rozwijany i modyfikowany przez wielu autorów. W pracy Albrighta (1974) rozważany był problem alokacji. W problemie tym każdy z pracowników, któremu przydzielono pewną pracę, miał przypisaną wagę odzwierciedlającą jego wydajność. Ponadto każdy z pracowników mógł przyjąć tylko jedno zlecenie do wykonania. Zagadnienie rozważane w pracy Albrighta (1974) zostało uogólnione na przypadek problemu alokacji z niepełną informacją w pracy Gershkova i Moldovanu (2010). W niniejszym artykule, w odróżnieniu od problemu alokacji rozważanego w powyższych pracach, zaakceptowane oferty przydzielane są losowo do któregoś z pracowników oraz każdemu z pracowników można przydzielić więcej niż jedną ofertę. Ponieważ sprzedawcy są losowani, to zachowania innych sprzedawców nie są znane. Niemniej w każdej chwili ich punkt widzenia, za ile mogą sprzedać towar, jest taki sam.

W niniejszej pracy poruszony zostanie również problem wielokrotnego stopowania, który po raz pierwszy został sformułowany przez Haggstroma (1967), a następnie rozwijany w pracach Stadje (1985), Köstersa (2004) oraz Nikolaeva (1999). Problemy wielokrotnego stopowania inspirowane problemem Elfvinga-Siegmunda zostały przedstawione w pracach Stadje (1987, 1990).

W literaturze rozważane są również gry z losowymi priorytetami. Należy tu wymienić prace Radzika i Szajowskiego (1990), Sakaguchiego (1991a, 1991b, 2001, 2002a, 2002b, 2005), Szajowskiego (1994, 1995), Ramseya i Szajowskiego (2000, 2001), Porosińskiego i Szajowskiego (2000), Porosińskiego (2005). W grach tych losowanie priorytetów odbywało się tylko w sytuacji, gdy co najmniej dwóch graczy chciało otrzymać daną ofertę.

Gra wieloosobowa z deterministycznymi priorytetami o strukturze wypłat, takiej jak w problemie Elfvinga-Siegmunda, była analizowana w pracy Ferenstein i Krasnosielskiej (2009a). Obszerną bibliografię na ten temat gier wieloosobowych z deterministycznymi i losowymi priorytetami można znaleźć w pracy Nowaka i Szajowskiego (1999).

Problem zaprezentowany w pracy Elfvinga (1967) był również rozważany w pracy Siegmunda (1967), który osłabił część założeń. Następnie problem ten został przedstawiony w monografii Chowa *et al.* (1971). W pracy Krasnosielskiej (2008) wyznaczono wartość oczekiwaną optymalnego momentu Markowa w problemie Elfvinga-Siegmunda. Problem Elfvinga-Siegmunda był również uogólniany i modyfikowany w wielu pracach. Mianowicie w pracach Davida i Yechialiego (1985) oraz Parlara *et al.* (2007) uogólniono założenia dotyczące momentów obserwacji ofert (np. wprowadzono proces odnowienia zamiast procesu Poissona, tzn. wprowadzono proces, w którym rozkład czasu oczekiwania między zgłoszeniami jest różny od wykładniczego i odstępy czasu między zgłoszeniami są niezależne, patrz Feller (2009), s. 174-177), a w pracy Ferenstein i Krasnosielskiej (2009b) oraz Krasnosielskiej (2009a, 2009b, 2010) uogólniono strukturę wypłaty. W pracy Cowana i Zabczyka (1978) zaprezentowano natomiast problem wyboru najlepszego obiektu z poissonowskim strumieniem pojawiania się ofert.

Problem sprzedaży domu w sytuacji gdy jest tylko dwóch potencjalnych klientów, został opisany w pracy Brussa (2005). Autor prezentuje *Z*-strategię, która pozwala zwiększyć prawdopodobieństwo wybrania lepszej oferty spośród dostępnych, jeśli nie znamy wysokości tych ofert.

Prowadzone były również badania empiryczne dotyczące zachowań osób podejmujących decyzje w sytuacjach zbliżonych do tych, które były analizowane w modelach matematycznych dotyczących problemu optymalnego wyboru. Obszerną bibliografię na ten temat można znaleźć w pracy Beardena *et al*. (2006). Badania te wykazały, że osoby podejmujące decyzje zwykle skracają czas obserwacji w stosunku do tego, który wskazują jako optymalny modele matematyczne. Wyniki tych badań uzasadniają wprowadzenie do modeli matematycznych funkcji kosztów związanych ze stresem towarzyszącym podejmowaniu decyzji. Takie koszty zostały po raz pierwszy wprowadzone w pracach Szajowskiego (2006, 2009).

Organizacja pracy. W rozdziale 3 sformułujemy problem alokacji oraz zaproponujemy strategię pozwalającą maksymalizować łączny zysk sprzedawców przy założeniu, że każdy z nich powinien zarobić średnio taką samą kwotę. Następnie pokażemy, że ta strategia jest Pareto-optymalna. Do konstrukcji zaproponowanej strategii będziemy wykorzystywać wyniki uzyskane w pracy Stadje (1987) i przytoczone w rozdziale 2. Część wyników prezentowanych w niniejszym artykule jest oparta na pracy Krasnosielskiej (2011).

2. Problem wielokrotnego stopowania Stadje

Załóżmy, że Y_1, Y_2, ... są niezależnymi, nieujemnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie danym ciągłą dystrybuantą F oraz $E(Y_1) \in (0, \infty)$, $Y_0 = 0$. Zmienne losowe Y_1, Y_2, ... pojawiają się w momentach skoków T_1, T_2, ... jednorodnego procesu Poissona $N(s)$, $s \geq 0$, o intensywności 1. Ciągi $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ i $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne. Przyjmijmy $T_0 = 0$. Niech r:$[0, \infty) \to [0, 1]$ będzie funkcją prawostronnie ciągłą, nierosnącą, spełniającą następujące warunki: $r(0) = 1$, $r(s) > 0$ dla $s \in [0, U)$ oraz $r(s) = 0$ dla $s \geq U$, gdzie U < ∞,

$$r(u+v) \leq r(u)r(v), \quad u, v \in [0, \infty).$$

Ponadto zakładamy, że zbiór punktów nieciągłości funkcji r jest skończony. Niech $\mathsf{F}_n = \sigma(Y_1, ..., Y_n, T_1, ..., T_n)$, $\mathsf{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathsf{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{n \in \mathsf{N}_0} \mathsf{F}_n)$, gdzie $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$, M będzie dyskretnym zbiorem skończonych momentów zatrzymania względem filtracji $\{\mathsf{F}_n\}_{n \in \overline{\mathsf{N}}_0}$, gdzie $\overline{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{N}_0 \cup \{\infty\}$, oraz

$$\mathsf{M}_j(k) = \{(\tau^1, \ldots, \tau^k) : \tau^1, \ldots, \tau^k \in \mathsf{M}, j \leq \tau^1 < \ldots < \tau^k\}.$$

W niniejszym rozdziale wyznaczymy optymalny k-krotny moment zatrzymania $(\tau_1^{1,k}, \ldots, \tau_1^{k,k}) \in \mathsf{M}_1(k)$ dla ciągu wypłat $\{G_n\}_{n \in \overline{\mathsf{N}}_0}$, gdzie

$$G_n = Y_n r(T_n), \quad n \in \mathsf{N}_0,$$

$G_\infty = 0$, to znaczy taki k-krotny moment zatrzymania $(\tau_1^{1,k}, \ldots, \tau_1^{k,k}) \in \mathsf{M}_1(k)$, że

$$E(G_{\tau_1^{1,k}} + \ldots + G_{\tau_1^{k,k}}) = \sup_{(\tau^1, \ldots, \tau^k) \in \mathsf{M}_1(k)} E(G_{\tau^1} + \ldots + G_{\tau^k}),$$

oraz optymalną oczekiwaną wypłatę $E(G_{\tau_1^{1,k}} + \ldots + G_{\tau_1^{k,k}})$.

Interpretacja. Stadje (1987) zaproponował następującą interpretację przedstawionego modelu. Sprzedawca posiada k identycznych dóbr, które chce sprzedać. Otrzymuje on oferty Y_n w momentach T_n, $n \in$ N. Celem sprzedawcy jest maksymalizacja oczekiwanej łącznej wypłaty ze sprzedaży tych dóbr, gdzie G_n jest wypłatą ze sprzedaży dobra w momencie T_n, a r jest funkcją dyskontującą.

2.1. Rozwiązanie

Niech $S = \{s_0, ..., s_l\}$, gdzie $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{l-1} < s_l = U$, $l < \infty$, zawiera wszystkie punkty nieciągłości funkcji r. Ponadto niech $\overline{F}(s) = 1 - F(s)$ oraz $H(s) = E(Y_1 \mathrm{I}(Y_1 > s))$, $s \in$ R, gdzie I(A) oznacza funkcję charakterystyczną zdarzenia A.

Twierdzenie 2.2. (Stadje, 1987)

(a) *Istnieje k jednoznacznie wyznaczonych funkcji* $\gamma^1(x) \geq \gamma^2(x) \geq \ldots \geq \gamma^k(x)$, $x \geq 0$, takich, że:

(i) dla $i \in \{1, \ldots, k\}$ *funkcja* γ^i *jest ciągła i ma kawałkami ciągłą pochodną,*

(ii) *funkcja* γ^1 *spełnia następujące równanie*

$$\frac{d}{dx}\gamma^1(x) = \gamma^1(x)\overline{F}\left(\frac{\gamma^1(x)}{r(x)}\right) - r(x)H\left(\frac{\gamma^1(x)}{r(x)}\right) \tag{1}$$

w każdym z przedziałów (s_n, s_{n+1}), $n \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, *oraz* $\gamma^i(x) = 0$ *dla* $x \geq U$.

(iii) dla $i \in \{2, \ldots, k\}$ *funkcja* γ^i *spełnia następujące równanie*

$$\frac{d}{dx}\gamma^i(x) = \gamma^i(x)\overline{F}\left(\frac{\gamma^i(x)}{r(x)}\right) - r(x)H\left(\frac{\gamma^i(x)}{r(x)}\right) - \gamma^{i-1}(x)\overline{F}\left(\frac{\gamma^{i-1}(x)}{r(x)}\right) + r(x)H\left(\frac{\gamma^{i-1}(x)}{r(x)}\right) \tag{2}$$

w każdym z przedziałów (s_n, s_{n+1}), $n \in \{0, 1, \ldots, l-1\}$, *oraz* $\gamma^i(x) = 0$ *dla* $x \geq U$.

(b) *Dodatkowa oczekiwana wypłata, jaką uzyskamy ze sprzedaży i-tego dobra, jeśli mamy i zamiast* $i-1$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, *dóbr na sprzedaż, jest równa*

$$\gamma^1(0) = \begin{cases} \sup_{\tau^1 \in M_1(1)} E(G_{\tau^1}), & \text{jeśli} \quad i = 1, \\ \sup\limits_{(\tau^1,\ldots,\tau^i) \in M_1(i)} E(G_{\tau^1} + \ldots + G_{\tau^i}) - \sup\limits_{(\tau^1,\ldots,\tau^{i-1}) \in M_1(i-1)} E(G_{\tau^1} + \ldots + G_{\tau^{i-1}}), & \text{jeśli} \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Z twierdzenia 2.2(b) otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} \gamma^i(0) = \sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k) \in \mathrm{M}_1(k)} E(G_{\tau^1} + \ldots + G_{\tau^k}). \tag{3}$$

Dla $j \in N_0$ oraz $i \in \{1, \ldots, k\}$ zdefiniujmy

$$\tau^i(j) = \inf\{n \geq j : G_n \geq \gamma^i(T_n)\},$$

gdzie $\tau^i(\infty) = \infty$, oraz

$$\tau_j^{i,k} = \begin{cases} \tau^k(j), & i = 1, \\ \tau^{k-(i-1)}(\tau_j^{i-1,k} + 1), & i \in \{2, \ldots, k\}. \end{cases} \tag{4}$$

Zmienną losową $\tau_j^{i,k}$ interpretujemy jako moment sprzedaży i-tego dobra spośród k-dóbr na sprzedaż, jeśli dobra „wystawiamy” na sprzedaż w momencie obserwacji j-tej oferty. Zauważmy, że $\tau_j^{i,k}$ to pierwszy moment po momencie zatrzymania $\tau_j^{i-1,k}$, w którym wypłata jest nie mniejsza niż optymalna warunkowa oczekiwana wypłata ze sprzedaży i-tego dobra w przyszłości, jeśli mamy i zamiast $i - 1$ dóbr na sprzedaż. Praktyczne zastosowanie wzoru (4) wygląda następująco. Pierwsze dobro zostanie sprzedane w momencie obserwacji oferty o numerze n_1, jeśli wypłata G_{n_1}, którą uzyskamy ze sprzedaży dobra w tym momencie, będzie większa lub równa $\gamma^k(T_{n_1})$. Drugie dobro zostanie sprzedane w momencie obserwacji oferty o numerze n_2, $n_2 > n_1$, jeśli wypłata G_{n_2}, którą uzyskamy ze sprzedaży drugiego dobra w tym momencie, będzie większa lub równa $\gamma^{k-1}(T_{n_2})$, itd. Ostatnie k-te dobro zostanie sprzedane w momencie obserwacji oferty o numerze n_k, $n_k > n_{k-1}$, jeśli wypłata G_{n_k}, którą uzyskamy ze sprzedaży k-tego dobra w tym momencie, będzie większa lub równa $\gamma^1(T_{n_k})$. Zauważmy, że funkcję γ^i, $i = 1, 2, ..., k$, możemy interpretować jako krzywą opłacalności sprzedaży dobra o numerze $k - i + 1$. Funkcję tę wyznaczamy z równań (1) i (2) danych w twierdzeniu 2.2.

Twierdzenie 2.3. (Stadje, 1987) $(\tau_1^{1,k},\dots,\tau_1^{k,k}) \in \mathsf{M}_1(k)$ *oraz* $(\tau_1^{1,k},\dots,\tau_1^{k,k})$ *jest optymalnym k-krotnym momentem zatrzymania dla ciągu wypłat* $\{G_n\}_{n\in\overline{\mathsf{N}}_0}$.

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy, że powyższa strategia pozwala maksymalizować łączny oczekiwany zysk ze sprzedaży dóbr. Zauważmy jeszcze, że optymalne momenty zatrzymania mają postać progową.

3. Problem alokacji

m-osobowa grupa sprzedawców o indeksach 1, 2, ..., m obserwuje ciąg wypłat $\{G_n\}_{n\in\overline{\mathsf{N}}_0}$, gdzie $G_n = Y_n r(T_n)$, $n \in \mathrm{N}_0$, $G_\infty = 0$. Każdy z niech decyzję odnośnie akceptacji bądź odrzucenia danej wypłaty podejmuje na podstawie obecnie prezentowanej wypłaty i wypłat prezentowanych do tej chwili, uwzględniając ich priorytety. Dokładniej mówiąc, sprzedawca i-ty, który zdecydował się wybrać wypłatę G_n w momencie jej pojawienia się, otrzymuje tą wypłatę wtedy i tylko wtedy, gdy w chwili T_n otrzymał priorytet (prawo wyboru) i do tej chwili sprzedawcy łącznie nie przyjęli więcej niż $k - 1$ wypłat (sprzedawca może otrzymać więcej niż jedną wypłatę). Priorytet jest losowany przed podjęciem decyzji przez sprzedawców odnośnie akceptacji bądź odrzucenia danej wypłaty. Zatem priorytet jest rozumiany jako prawo do akceptacji bądź odrzucenia tej wypłaty. W każdym momencie prawo to przysługuje tylko jednemu ze sprzedawców.

3.1. Sformułowanie problemu

Przyjmujemy założenia te same co w rozdziale 2. Dodatkowo zakładamy, że ciągi $\{W_n\}_{n\in\mathrm{N}_0}$ i $\{\mathsf{F}_n\}_{n\in\mathrm{N}_0}$ są niezależne, gdzie W_0, W_1, ... są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $\{1, ..., m\}$. Niech $\mathsf{G}_n = \sigma(\mathsf{F}_n, \sigma(W_1, ..., W_n))$, $n \in \mathrm{N}_0$, $\mathsf{G}_\infty = \sigma(\bigcup_{n\in\mathrm{N}_0}\mathsf{G}_n)$. Ponadto niech D będzie zbiorem ciągów zero-jedynkowych, $\{\mathsf{G}_n\}$-adaptowanych, $D^m = \underbrace{D\times\ldots\times D}_{m}$. Niech $\psi^i = \{\psi_n^i\}_{n\in\mathrm{N}} \in D$ będzie strategią i-tego sprzedawcy w m-osobowej grupie sprzedawców, a $\psi = (\psi^1, ..., \psi^m)$ strategią m-osobowej grupy. Jeśli $\psi_n^i = 1$, to decyzja i-tego gracza w momencie obserwacji n-tej oferty brzmi: chcę przyjąć wypłatę G_n. Jeśli $\psi_n^i = 0$, to decyzja i-tego gracza w momencie obserwacji n-tej oferty brzmi: nie przyjmuję wypłaty G_n.

Dla $j \in \{1, ..., k\}$ zdefiniujmy

$$\sigma_j(\psi) = \inf\{n \geq \sigma_{j-1}(\psi)+1 : \sum_{i=1}^{m} \mathrm{I}(\psi_n^i = 1, W_n = i) = 1\},$$

gdzie $\sigma_0(\psi) = 0$. Zmienną losową $\sigma_j(\psi)$ interpretujemy jako moment, w którym zostanie sprzedane j-te dobro przez któregoś ze sprzedawców w m-osobowej grupie o strategii ψ. Zmienna losowa W_n wskazuje indeks sprzedawcy, który ma prawo zaakceptować ofertę Y_n (otrzymać wypłatę G_n).

Uwzględniając strategię ψ, wypłata i-tego sprzedawcy, $j \in \{1, ..., m\}$, spośród m-osobowej grupy sprzedawców, jest równa $\sum_{j=1}^{k} G_{\sigma_j(\psi)} \mathrm{I}(W_{\sigma_j(\psi)} = i)$, a oczekiwana wypłata i-tego sprzedawcy jest równa

$$V_i(\psi) = E(\sum_{j=1}^{k} G_{\sigma_j(\psi)} \mathrm{I}(W_{\sigma_j(\psi)} = i)).$$

Niech $D_1^m \subseteq D^m$ będzie takim zbiorem, że $\psi \in D_1^m$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma_j(\psi) < \infty$, $j \in \{1, ..., k\}$.

Naszym celem jest wyznaczenie strategii $\hat{\psi} \in D_1^m$ takiej, że dla $i, j \in \{1, ..., m\}$

$$V_i(\hat{\psi}) = V_j(\hat{\psi}) \tag{5}$$

oraz

$$\sum_{n=1}^{m} V_n(\hat{\psi}) \geq \sum_{n=1}^{m} V_n(\psi) \tag{6}$$

dla każdej strategii $\psi \in D_1^m$. To znaczy, szukamy strategii, która pozwoli każdemu z graczy uzyskać średnio taką samą premię i jednocześnie pozwoli maksymalizować oczekiwany łączny zysk.

3.2. Konstrukcja strategii

Poniżej zaproponujemy strategię $\hat{\psi}$ spełniającą warunki (5) i (6).

Niech $\hat{\psi} = (\hat{\psi}^1, \ldots, \hat{\psi}^m)$, gdzie $\hat{\psi}^i = \{\hat{\psi}^i_n\}_{n\in \mathrm{N}}$ dla $i \in \{1, ..., m\}$. Dla $i \in \{1, ..., m\}$, $n \in$ N oraz ustalonego $k \in$ N zdefiniujmy

$$\hat{\psi}^i_n = \mathrm{I}(W_n = i)\sum_{j=1}^{k} \mathrm{I}(\tau_1^{j,k} = n),$$

gdzie moment zatrzymania $\tau_1^{j,k}$ jest dany wzorem (4), to znaczy

$$\tau_1^{j,k} = \begin{cases} \tau^k(1), & j = 1, \\ \tau^{k-(j-1)}(\tau_1^{j-1,k} + 1), & j \in \{2, \ldots, k\}. \end{cases}$$

Teraz moment zatrzymania $\tau_1^{j,k}$ interpretujemy jako moment sprzedaży przez któregoś ze sprzedawców j-tego dobra spośród k-dóbr, jeśli proces decyzyjny rozpoczyna się w momencie obserwacji pierwszej oferty. Zauważmy, że zgodnie z zaproponowaną strategią sprzedawcy będą sprzedawać dobra w momentach wskazanych w modelu Stadje jako optymalne (Krasnosielska, 2011, lemat 7.5), tzn.

$$\sigma_j(\hat{\psi}) = \tau_1^{j,k}, \quad j \in \{1, \ldots, k\}. \tag{7}$$

Przy czym w momencie $\tau_1^{j,k}$ sprzedaży będzie dokonywał sprzedawca, który właśnie otrzymał prawo wyboru, to znaczy sprzedawca o numerze $W_{\tau_1^{j,k}}$. Zatem sprzedawcy łącznie wypracują zysk równy łącznej oczekiwanej wypłacie ze sprzedaży k-dóbr w momentach wskazanych za optymalne w modelu Stadje (Krasnosielska, 2011, s. 112), tzn.

$$\sum_{i=1}^{m} V_i(\hat{\psi}) = \sum_{j=1}^{k} \gamma^j(0). \tag{8}$$

Zauważmy jeszcze, że strategia $\hat{\psi}$ jest dobrze zdefiniowana, to znaczy $\hat{\psi} \in D_1^m$ (Krasnosielska, 2011, lemat 7.6).

Twierdzenie 3.1. (Krasnosielska, 2011, twierdzenie 7.9) *Strategia $\hat{\psi}$ spełnia warunki* (5) *i* (6), to znaczy *$\hat{\psi}$ jest szukaną strategią.*

Zauważmy, że z (5) i (8) otrzymujemy, że każdy ze sprzedawców wypracuje oczekiwany zysk w wysokości $\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{k}\gamma^j(0)$, to znaczy w wysokości równej jednej m-tej części tego, co uzyskałby sprzedawca, sprzedając k-dóbr zgodnie z modelem Stadje (czyli w sytuacji, gdy byłby tylko jeden sprzedawca).

Mówimy, że strategia $\psi \in D_1^m$ jest Pareto-optymalna w D_1^m, jeśli nie istnieje $\varphi \in D_1^m$ takie, że dla każdego $i \in \{1, ..., m\}$ zachodzi

$$V_i(\varphi) \geq V_i(\psi)$$

i co najmniej jedna z powyższych nierówności jest ostra. To znaczy, strategia ψ jest Pareto-optymalna, jeśli nie istnieje taka strategia, która dałaby większą oczekiwaną wypłatę co najmniej dla jednego gracza i jednocześnie nie pogorszyła sytuacji innego.

Zgodnie z kryterium Pareto ta strategia jest lepsza, która daje większą wygraną wszystkim graczom. Zatem kryterium Pareto jest podstawową zasadą racjonalności grupowej. Zaznaczmy, że strategie Pareto-optymalne dają wskazówkę graczom o swoich możliwościach wygranych, które uwzględniają również interes pozostałych graczy (Płonka, 2001). Równoważne definicje strategii Pareto-optymalnych ze szczegółowym ich omówieniem zostały przedstawione np. w monografiach Płonki (2001) i Straffina (2004).

Twierdzenie 3.2. *Strategia* $\hat{\psi} \in D_1^m$ *jest Pareto-optymalna w* D_1^m.

Dowód powyższego twierdzenia można intuicyjnie przedstawić następująco. Sprzedawcy łącznie wypracują zysk równy łącznej oczekiwanej wypłacie ze sprzedaży k-dóbr w momentach wskazanych za optymalne w modelu Stadje, to znaczy wypracują maksymalny możliwy łączny oczekiwany zysk. Jeśli istniałaby strategia pozwalająca co najmniej jednemu z nich wypracować większy oczekiwany zysk, nie zmniejszając wypracowanego oczekiwanego zysku innego sprzedawcy, to zgodnie z tą nową strategią łącznie wypracowaliby oni większy oczekiwany zysk niż maksymalny możliwy łączny oczekiwany zysk (zysk wypracowany przy zastosowaniu strategii $\hat{\psi}$). Jest to jednak sprzeczne. Dowód formalny twierdzenia 3.2 został przedstawiony w dodatku.

3.3. Przykłady

Przykład 3.1. Załóżmy, że w pewnym salonie samochodowym pracuje dwóch sprzedawców. W ciągu 10 najbliższych dni muszą oni sprzedać trzy identyczne samochody (przyjmujemy, że po tym czasie salon zostanie zamknięty i zysk ze sprzedaży samochodów będzie równy zero). Każdy z nich dostanie premię w wysokości 10% od kwoty, jaką zarobią dla właściciela salonu. Zakładamy, że potencjalni klienci wybierają losowo sprzedawcę, od którego ewentualnie kupią samochód. Ponadto przedstawiają oni sprzedawcy pewną kwotę, którą są gotowi zapłacić za ten samochód (oferta ta nie podlega negocjacjom). Kwota ta jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym o średniej 1 (pewnej jednostki pieniężnej). Poniżej odpowiemy na pytania:

- Ile zarobi każdy ze sprzedawców?
- Po jakiej cenie powinni sprzedać te samochody?
- Kiedy powinni sprzedać te samochody?

Aby odpowiedzieć na powyższe pytania, rozwiążemy najpierw problem wielokrotnego stopowania Stadje omówiony w rozdziale 2.

Przyjmujemy, że $r(u) = 1$ dla $u \in [0, 10)$ i 0 w przeciwnym przypadku. Z założeń mamy $F(s) = 1 - \exp(-s)$ oraz $H(s) = (s + 1)\exp(-s)$, $s \geq 0$. Zatem równanie (1) przyjmuje postać

$$\frac{\gamma^1(x)}{dx} = -\exp(-\gamma^1(x)), \quad x \in (0,10).$$

Rozwiązując powyższe równanie z warunkiem brzegowym $\gamma^1(10) = 0$ otrzymujemy $\gamma^1(x) = \ln(11 - x)$. Stąd

$$\gamma^1(0) = \ln(11).$$

Ponadto równanie (2) dla $i = 2$ przyjmuje postać

$$\frac{d}{dx}\gamma^2(x) = -\exp(-\gamma^2(x)) + \frac{1}{11-x}, \quad x \in (0,10).$$

Korzystając z warunku brzegowego $\gamma^2(10) = 0$, dostajemy

$$\gamma^2(x) = \ln(\frac{122 - 22x + x^2}{2(11-x)})$$

oraz

$$\gamma^2(0) = \ln(\frac{122}{22}).$$

Analogicznie otrzymujemy, że $\gamma^3(x)$ spełnia równanie

$$\frac{d}{dx}\gamma^3(x) = -\exp(-\gamma^3(x)) + \frac{2(11-x)}{122 - 22x + x^2}, \quad x \in (0,10)$$

z warunkiem brzegowym $\gamma^3(10) = 0$. Zatem

$$\gamma^3(x) = \ln(\frac{-366x + 33x^2 - x^3 + 1366}{3(122 - 22x + x^2)}).$$

Stąd

$$\gamma^3(0) = \ln(\frac{1366}{366}).$$

Możemy już odpowiedzieć na pierwsze pytanie. Łącznie sprzedawcy zarobią

$$\ln(11) + \ln(\frac{122}{22}) + \ln(\frac{1366}{366}) = \ln(\frac{1366}{6}) = \ln(455\frac{1}{3}) \approx 6,12.$$

Zatem każdy z nich średnio wypracuje dla firmy 6,12 / 2 ≈ 3,06. Stąd każdy ze sprzedawców otrzyma średnio premię w wysokości 0,306 (jednostki pieniężnej).

Korzystając z (4) otrzymujemy, że zgodnie z modelem Stadje samochody zostaną sprzedane w momentach

$$\tau_1^{1,3} = \tau^3(1) = \inf\{n \geq 1 : G_n \geq \gamma^3(T_n)\},$$
$$\tau_1^{2,3} = \tau^2(1+\tau_1^{1,3}) = \inf\{n \geq \tau_1^{1,3} + 1 : G_n \geq \gamma^2(T_n)\},$$
$$\tau_1^{3,3} = \tau^1(1+\tau_1^{2,3}) = \inf\{n \geq \tau_1^{2,3} + 1 : G_n \geq \gamma^1(T_n)\},$$

gdzie funkcje γ^i, $i = 1, 2, 3$, zostały wyznaczone powyżej. Zatem na mocy (7) w rozważanym problemie alokacji samochody zostaną sprzedane w tych samych momentach, które jako optymalne wskazuje model Stadje, tzn. w momentach $\tau_1^{1,3}, \tau_1^{2,3}, \tau_1^{3,3}$. Dodatkowo mamy, że pierwsze dobro zostanie sprzedane po cenie nie niższej niż $\gamma^3(T_{\tau_1^{1,3}})$, drugie dobro po cenie nie niższej niż $\gamma^2(T_{\tau_1^{2,3}})$, a trzecie po cenie nie niższej niż $\gamma^1(T_{\tau_1^{3,3}})$. Ponadto mamy, że n-te dobro zostanie sprzedane przez sprzedawcę z numerem i, jeśli $W_{\tau_1^{n,3}} = i, n \in \{1, 2, 3\}, i \in \{1, 2\}$.

Zauważmy, że **średnio** każdy ze sprzedawców otrzyma premię w wysokości 0,306 (jednostki pieniężnej), czyli jeśli sprzedawcy będą stosować ten model wielokrotnie, przy tych samych warunkach, to otrzymają średnio premię w wysokości 0,306 z zastosowania tego modelu w ciągu danych 10 dni. Zatem model ten nie faworyzuje żadnego ze sprzedawców.

Jak jednak wygląda sytuacja z **jednokrotnego** zastosowania tego modelu? Aby odpowiedzieć na to pytanie, przedstawimy symulację wysokości ofert prezentowanych przez kupujących, czasu ich przybycia do sklepu i numeru sprzedawcy, który został wybrany przez tego kupującego. Wyniki przedstawione są w tabelce.

W przedostatniej kolumnie podany jest numer sprzedającego, do którego zgłosił się n-ty kupujący w przypadku, gdy mamy trzech oraz dwóch sprzedawców.

n	T_n	Y_n	$\gamma^1(T_n)$	$\gamma^2(T_n)$	$\gamma^3(T_n)$	Czy $G_n \geq \gamma^3(T_n)$?	Czy $G_n \geq \gamma^2(T_n)$?	Czy $G_n \geq \gamma^1(T_n)$?	$m = 3$	$m = 2$
1	0,41	1,02	2,36	1,68	1,28	nie	nie	nie	3	2
2	2,17	0,12	2,18	1,5	1,11	nie	nie	nie	3	2
3	2,65	1,1	2,12	1,44	1,05	TAK	nie	nie	1	1
4	2,81	0,37	2,1	1,42	1,04		nie	nie	2	1
5	3,06	1,88	2,07	1,39	1,01		TAK	nie	3	2

6	3,44	1,78	2,02	1,35	0,96			nie	1	1
7	3,6	0,25	2	1,33	0,94			nie	1	1
8	4,41	4,25	1,89	1,22	0,84			TAK	3	2
9	4,73	0,34	1,84	1,17	0,79				1	1
10	4,94	0,24	1,8	1,14	0,76				2	1
11	5,33	0,88	1,74	1,07	0,71				3	2
12	5,42	0,61	1,72	1,06	0,69				2	1
13	5,67	1,28	1,67	1,01	0,65				3	2
14	6,65	1,25	1,47	0,83	0,49				3	2
15	9,45	0,69	0,44	0,09	0,02				1	1
16	9,54	0,21	0,38	0,07	0,01				1	1
17	15,15	0,47	0	0	0				2	2

W tym przykładzie rozważamy dwóch sprzedawców. Z tabelki widzimy, że pierwsze dobro zostanie sprzedane trzeciemu kupującemu w chwili $T_3 = 2{,}65$ po cenie 1,1. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 1, zatem to on dokona transakcji. Drugie dobro zostanie sprzedane piątemu kupującemu w chwili $T_5 = 3{,}06$ po cenie 1,88. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 2, zatem to on dokona transakcji. Trzecie dobro zostanie sprzedane ósmemu kupującemu w chwili $T_8 = 4{,}41$ po cenie 4,25. Ten kupujący zgłosi się również do sprzedającego o numerze 2, zatem to on dokona transakcji. Stąd sprzedawca o numerze 1 sprzeda dobra za kwotę 1,1, czyli otrzyma premię w wysokości 0,11. Sprzedawca o numerze 2 sprzeda dobra za kwotę 1,88 + 4,25 = 6,13, czyli otrzyma premię w wysokości około 0,61

Podsumowując, zaproponowana strategia nie faworyzuje żadnego ze sprzedawców, gdyż średnia premia każdego z nich jest taka sama. Niemniej przy jednokrotnym zastosowaniu zaproponowanego rozwiązania ich premie są różne.

Przykład 3.2. Załóżmy teraz, że mamy trzech sprzedawców i trzy dobra na sprzedaż, a pozostałe założenia są takie jak w przykładzie 3.1. Wówczas łącznie sprzedawcy zarobią również

$$\ln(11) + \ln\left(\frac{122}{22}\right) + \ln\left(\frac{1366}{366}\right) \approx 6{,}12.$$

Jednak w tym przypadku każdy z nich średnio wypracuje dla firmy 6,12 / 3 ≈ 2,04. Stąd każdy ze sprzedawców otrzyma średnio premię w wysokości 0,204 Samochody, tak jak poprzednio, zostaną sprzedane w momentach $\tau_1^{1,3}, \tau_1^{2,3}, \tau_1^{2,3}$ odpowiednio po cenie nie niższej niż $\gamma^3(T_{\tau_1^{1,3}}), \gamma^2(T_{\tau_1^{2,3}}), \gamma^1(T_{\tau_1^{3,3}})$.

Jak jednak wygląda sytuacja z **jednokrotnego** zastosowania tego modelu?

W tym przykładzie rozważamy trzech sprzedawców. Z tabelki widzimy, że pierwsze dobro zostanie sprzedane trzeciemu kupującemu w chwili $T_3 = 2{,}65$ po cenie 1,1. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 1, zatem to on dokona transakcji. Drugie dobro zostanie sprzedane piątemu kupującemu w chwili T_5 = 3,06 po cenie 1,88. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 3, zatem to on dokona transakcji. Trzecie dobro zostanie sprzedane ósmemu kupującemu w chwili T_8 = 4,41 po cenie 4,25. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 3, zatem to on dokona transakcji. Stąd sprzedawca o numerze 1 sprzeda dobra za kwotę 1,1, czyli otrzyma premię w wysokości 0,11. Sprzedawca o numerze 2 nie sprzeda żadnego dobra, czyli otrzyma premię w wysokości 0. Sprzedawca o numerze 3 sprzeda dobra za kwotę 1,88 + 4,25 = 6,13, czyli otrzyma premię w wysokości około 0,61.

Przykład 3.3. Załóżmy teraz, że mamy trzech sprzedawców i dwa samochody na sprzedaż, a pozostałe założenia są takie, jak w przykładzie 3.1. Teraz sprzedawcy łącznie zarobią

$$\ln(11) + \ln(\frac{122}{22}) \approx 4{,}11.$$

W tym przypadku każdy z nich średnio wypracuje dla firmy 4,11 / 3 ≈ 1,37. Stąd każdy ze sprzedawców otrzyma średnio premię w wysokości 0,137. Samochody zostaną sprzedane w momentach $\tau_1^{1,2}, \tau_1^{2,2}$, gdzie

$$\tau_1^{1,2} = \tau^2(1) = \inf\{n \geq 1 : G_n \geq \gamma^2(T_n)\},$$
$$\tau_1^{2,2} = \tau^1(1+\tau_1^{1,2}) = \inf\{n \geq \tau_1^{1,2} + 1 : G_n \geq \gamma^1(T_n)\}$$

odpowiednio po cenie nie niższej niż $\gamma^2(T_{\tau_1^{1,2}}), \gamma^1(T_{\tau_1^{2,2}})$.

Jak jednak wygląda sytuacja z **jednokrotnego** zastosowania tego modelu?

W tym przykładzie rozważamy dwóch sprzedawców. Z tabelki widzimy, że pierwsze dobro zostanie sprzedane piątemu kupującemu w chwili T_5 = 3,06 po cenie 1,88. Ten kupujący zgłosi się do sprzedającego o numerze 2, zatem to on dokona transakcji. Drugie dobro zostanie sprzedane ósmemu kupującemu w chwili T_8 = 4,41 po cenie 4,25. Ten kupujący zgłosi się również do sprzedawcy o numerze 2. Stąd sprzedawca o numerze 1 nie sprzeda żadnego dobra, czyli otrzyma premię w wysokości 0. Sprzedawca o numerze 2 sprzeda dobra za łączną kwotę 1,88 + 4,25 = 6,13, czyli otrzyma premię w wysokości około 0,61.

4. Podziękowania

Chciałabym serdecznie podziękować prof. nzw. dr hab. Elżbiecie Ferenstein za dyskusje dotyczące modelu prezentowanego w niniejszym artykule oraz prof. dr. hab. Andrzejowi Nowakowi za pytanie dotyczące Pareto-optymalności zaproponowanej strategii, które doprowadziło do twierdzenia 3.2.

Niniejsza praca jest współfinansowana: z grantu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego N N201 367236; przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego, projekt „Program Rozwojowy Politechniki Warszawskiej"; ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego i Budżetu Państwa w ramach Zintegrowanego Programu Operacyjnego Rozwoju Regionalnego, Działania 2.6 „Regionalne Strategie Innowacyjne i transfer wiedzy" projektu własnego Województwa Mazowieckiego „Mazowieckie Stypendium Doktoranckie".

5. Dodatek

W tej części pracy przedstawimy ścisły dowód twierdzenia 3.2. W tym celu zdefiniujmy $\mathsf{M}_1^*(k)=\{(\tau^1,\ldots,\tau^k):\tau^1,\ldots,\tau^k\in\mathsf{M}^*, 1\le\tau^1<\ldots<\tau^k\}$, gdzie M* jest dyskretnym zbiorem skończonych momentów zatrzymania względem filtracji $\{\mathsf{G}_n\}_{n\in\overline{\mathsf{N}}_0}$.

Lemat (Krasnosielska, 2011, lemat 7.8)

$$\sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k)\in\mathsf{M}_1^*(k)} E\left(\sum_{j=1}^k G_{\tau^j}\right)=\sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k)\in\mathsf{M}_1(k)} E\left(\sum_{j=1}^k G_{\tau^j}\right).$$

Dowód twierdzenia 3.2. Załóżmy, że istnieje $\varphi\in D_1^m$ takie, że $V_i(\varphi)\ge V_i(\hat{\psi})$, $i=1$, 2, ..., m i co najmniej jedna z nierówności jest ostra. Wówczas

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m V_i(\varphi) > \sum_{i=1}^m V_i(\hat{\psi}) = \sum_{j=1}^k \gamma^j(0) &= \sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k)\in\mathsf{M}_1(k)} E(G_{\tau^1}+\ldots+G_{\tau^k}) = \\ &= \sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k)\in\mathsf{M}_1^*(k)} E(G_{\tau^1}+\ldots+G_{\tau^k}), \qquad (9)\end{aligned}$$

gdzie powyżej wykorzystaliśmy zależności (8) i (3) oraz powyższy lemat. Zauważmy, że z definicji oczekiwanej wypłaty i-tego sprzedawcy otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^m V_i(\varphi)=E\left(\sum_{j=1}^k G_{\sigma_j(\varphi)}\right)\le \sup_{(\tau^1,\ldots,\tau^k)\in\mathsf{M}_1^*(k)} E(G_{\tau^1}+\ldots+G_{\tau^k}),$$

co łącznie z (9) daje sprzeczność.

Bibliografia

Albright, S. Christian. 1974. *Optimal sequential assignments with random arrival times*. „Management Science" 21: 60-67.

Bearden, Neil J., Amnon Rapoport i Ryan O. Murphy. 2006. *Experimental studies of sequential selection and assignment with relative ranks*. „Journal of Behavioral Decision Making" 19: 229-250.

Billingsley Patric. 2009. *Prawdopodobieństwo i miara. Warszawa:* PWN.

Bruss Thomas. F. 2005. *Jak przechytrzyć niepewność*. „Decyzje" 4: 61-68.

Chow, Y.S., Herbert Robbins i David Siegmund. 1971. *Great Expectations: The Theory of Optimal Stopping*. Boston: Houghton Mifflin Company.

Cowan, Richard i Jerzy Zabczyk. 1978. *An optimal selection problem associated with the Poisson process*. „Theory of Probability and its Applications" 23: 584-592.

David Israel i Uri Yechiali. 1985. *A time-dependent stopping problem with application to live organ transplants*. „Operations Research" 33. 491-504.

Elfving Gustav. 1967. *A persistency problem connected with a point process*. „Journal of Applied Probability" 4: 77-89.

Feller William. 2009. *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Tom II. Warszawa: PWN.

Ferenstein Elżbieta. Z. i Anna Krasnosielska. 2009a. *Nash equilibrium in a game version of Elfving problem*. W: B. Pierre, V. Gaitsgory, O. Pourtallier (red.) Advances in Dynamic Games and Their Applications. Analytical and Numerical Developments. Boston: Birkhäuser, s. 399-414.

Ferenstein Elżbieta Z. i Anna Krasnosielska. 2009b. *A version of the Elfving optimal stopping time problem with random horizon*. W: L. Petrosjan, Mazalov V. (red.) Game Theory and Applications 14. N.Y.: Nova Science Publishers, s. 40-53.

Gershkov Alex i Benny Moldovanu. 2010. *Efficient sequential assignment with incomplete information*. „Games and Economic Behavior" 68: 144-154.

Haggstrom Gus W. 1967. *Optimal sequential procedures when more than one stop is required*. „The Annals of Mathematical Statistics" 38: 1618-1626.

Krasnosielska Anna. 2008. *O problemie Elfvinga*. „Decyzje" 9: 101-114.

Krasnosielska Anna. 2009a. *A version of the Elfving problem with random starting time*. „Statistics & Probability Letters" 79: 2429-2436.

Krasnosielska Anna. 2009b. *On some optimal stopping time problem with a change of the distribution*. W: Proceedings of 4-th International PhD Students and Young Scientists Conference: Young Scientists Towards the Challenges of Modern Technology. Warsaw, s. 293-298.

Krasnosielska Anna. 2010. *A time dependent best choice problem with costs and random lifetime in organ transplants*. „Applicationes Mathematicae" 37: 257-274.

Krasnosielska Anna. 2011. *Zagadnienia optymalnego stopowania inspirowane problemem Elfvinga*. Praca doktorska. Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych Politechniki Warszawskiej.

Kösters Holger. 2004. *A note on multiple stopping rules*. „Optimization" 53: 69-75.

Nowak Andrzej S. i Krzysztof Szajowski. 1999. *Nonzero-sum stochastic games*. W: Stochastic and differential games: theory and numerical methods, Boston: Birkhäuser, s. 297-343.

Nikolaev Mikhail L. 1999. *On optimal multiple stopping of Markov sequences*. „Theory of Probability and its Applications" 43: 298-306.

Parlar Mahmut, David Perry i Wolfgang Stadje. 2007. *Optimal shopping when the sales are on - A Markovian full-information best-choice problem*. „Stochastic Models" 23: 351-371.

Płonka Ernest. 2001. *Wstęp do teorii gier.* Gliwice: Wydawnictwo Politechniki Śląskiej.

Porosiński Zdzisław. 2005. *Modified strategies in a competitive best choice problem with random priority*. W: A.S. Nowak, K. Szajowski (red.), Advances in Dynamic Games Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control. Boston: Birkhäuser, s. 263-270.

Porosiński Zdzisław i Krzysztof Szajowski. 2000. *Random priority two-person full-information best choice problem with imperfect observation*. „Applicationes Mathematicae" 27: 251-263.

Radzik Tadeusz i Krzysztof Szajowski. 1990. *Sequential games with random priority*. „Sequential Analysis" 9: 361-377.

Ramsey David i Krzysztof Szajowski. 2000. *N person stopping game with players given priority randomly*. RIMS Kokyuroku 1132: 69-74.

Ramsey David i Krzysztof Szajowski. 2001. *Three-person stopping game with players having privileges*. „Journal of Mathematical Sciences" 105: 2599-2608.

Sakaguchi Minoru. 1991a. *Sequential games with priority under expected value maximization*. „Mathematicae Japonicae" 26: 545-562.

Sakaguchi Minoru. 1991b. *Best-choice problems with random priority on a two-Poisson stream*. „Mathematicae Japonicae" 36: 731-745.

Sakaguchi Minoru. 2001. *Three-person stopping games under winning probability maximization and players' unequally weighted privilege*. „Scientiae Mathematicae Japonicae" 53: 417-433.

Sakaguchi Minoru. 2002a. *Better-than-opponent: A stopping game for Poisson-arriving offers*. „Scientiae Mathematicae Japonicae" 56: 457-473.

Sakaguchi Minoru. 2002b. *Optimal stopping games by equal-weight players for Poisson-arriving offers*. W: L. Petrosjan, V. Mazalov (red.) Game Theory and Applications 7, N.Y.: Nova Science Publishers, s. 158-169.

Sakaguchi Minoru. 2005. *Optimal stopping games where players have weighted privilege*. W: A.S. Nowak, K. Szajowski (red.) Advances in Dynamic Games. Applications to Economics, Finance, Optimization, and Stochastic Control 7, Boston: Birkhäuser, s. 285-294.

Siegmund David O. 1967. *Some problems in the theory of optimal stopping*. „The Annals of Mathematical Statistics" 38: 1627-1640.

Stadje Wolfgang. 1985. *On multiple stopping rules*. „Optimization" 16: 401-418.

Stadje Wolfgang. 1987. *An optimal k-stopping problem for the Poisson process*. W: P. Bauer, F. Konecny, W. Wetz, (red.) Proceedings of the 6th Pannonian Symposium on Mathematical Statistics, Dordrecht: Reidel B, s. 231-244.

Stadje Wolfgang. 1990. *A full information pricing problem for the sale of several identical commodities*. „Mathematical Methods of Operations Research" 34: 161-181.

Straffin Philips D. 2004. *Teoria gier.* Warszawa: Wydawnictwo Naukowe SCHOLAR.

Szajowski Krzysztof. 1994. *Markov stopping games with random priority*. „Mathematical Methods of Operations Research" 39: 69-84.

Szajowski Krzysztof. 1995. *Optimal stopping of a discrete Markov process by two decision makers*. „SIAM Journal on Control and Optimization" 33: 1392-1410.

Szajowski Krzysztof. 2006. *Optymalne postępowanie w problemie sekwencyjnej selekcji: teoria i praktyka*. „Decyzje" 5: 29-40.

Szajowski Krzysztof. 2009. *A rank-based selection with cardinal payoffs and a cost of choice*. „Scientiae Mathematicae Japonicae" 69: 285-293.